تمارين محلولة على بحث المحددات «المعينات»

❶ احسب (λ) التي تجعل قيمة المحدد $\Delta = 30$ ، $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

الحل : ننشر المحدد وفق العمود الرابع بعد أن نجري عليه التحويل $R_4 \to R_4 - R_1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

ننشر المحدد الثلاثي وفق السطر الأخير:

$$\Delta = (-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(+5)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = (-5)(-3\lambda) = 15\lambda$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta = 30 \\ \Delta = 15\lambda \end{matrix}\right\} \to 30 = 15\lambda \to \boxed{\lambda = 2}$$

❷ علل انعدام قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a+c & a+d & c+d \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ c+d & d+b & c+b & a+b \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويلات السطرية التالية: $R_2 \to R_2 + R_4$ ، $R_1 \to R_1 + R_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+b+c+d) & (a+b+c+d) & (a+b+c+d) & (a+b+c+d) \\ 11 & 11 & 11 & 11 \\ c+d & d+b & c+b & a+b \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 11(a+b+c+d)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ c+d & d+b & c+b & a+b \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}_{R1,R2\ \text{تطابق}} = 0$$

❸ احسب قيمة المحدد التالي : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & e^x + 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & e^{-x} + 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & e^x + 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & e^{-x} + 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{e^x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{e^{-x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (1)(e^x)(e^{-x})(1) = \boxed{1}$$

❹ احسب قيمة المحدد التالي $V=\begin{vmatrix}1 & sin\alpha & sin^2\alpha\\ 1 & sin\beta & sin^2\beta\\ 1 & sin\gamma & sin^2\gamma\end{vmatrix}$

$V=(sin\gamma-sin\beta)(sin\gamma-sin\alpha)(sin\beta-sin\alpha)$

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 2x & 2y & 2z & 2u\\ -7x & 0 & 7w & 7f & 7g\\ -5y & -5w & 0 & 5h & 5k\\ -3z & -3f & -3h & 0 & 3w\\ -4u & -4g & -4k & -4w & 0\end{vmatrix}$

الحل : نخرج من السطر الأول العامل المشترك (2) و من السطر الثاني العامل المشترك (7) و من السطر الثالث العامل المشترك (5) و من السطر الرابع العامل المشترك (3) و من السطر الخامس العامل المشترك (4) فنجد :

$$\Delta=[(2)(7)(5)(3)(4)]\underbrace{\begin{vmatrix}0 & x & y & z & u\\ -x & 0 & w & f & g\\ -y & -w & 0 & h & k\\ -z & -f & -h & 0 & w\\ -u & -g & -k & -w & 0\end{vmatrix}}_{\text{معدوم}}=0$$

❺ احسب قيمة المحدد Δ التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}x & sin\theta & cos\theta\\ -sin\theta & -x & 1\\ cos\theta & 1 & x\end{vmatrix}$

الحل : ننشر المحدد Δ بطريقة بيزو وذلك وفق السطر الأول :

$$\Delta=(+x)\begin{vmatrix}-x & 1\\ 1 & x\end{vmatrix}+(-sinx)\begin{vmatrix}-sin\theta & 1\\ cos\theta & x\end{vmatrix}+(cos\theta)\begin{vmatrix}-sin\theta & -x\\ cos\theta & 1\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(+x)(-x^2-1)+(-sin\theta)(-x.sin\theta-cos\theta)+(cos\theta)(-sin\theta+xcos\theta)$$

$$\Delta=-x^3-x+x.sin^2\theta+sin\theta cos\theta-sin\theta cos\theta+xcos^2\theta$$

$$\Delta=-x^3-x+x(sin^2\theta+cos^2\theta)=-x^3-x+x=\boxed{-x^3}$$

❻ اثبت قيمة المحدد Δ الآتي مستقلة عن المتغير θ $\Delta=\begin{vmatrix}cos\theta & 0 & -sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ sin\theta & 0 & cos\theta\end{vmatrix}$

الحل : ننشر المحدد Δ بطريقة بيزو وذلك وفق العمود الثاني :

$$\Delta=(+1)\begin{vmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{vmatrix}=(+1)[(cos\theta)(cos\theta)-(-sin\theta)(sin\theta)]$$

$$\Delta=cos^2\theta+sin^2\theta\rightarrow\boxed{\Delta=1}$$

❼ احسب قيمة Δ_n: $\Delta_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويل التالي $C_1 \to \sum_1^n c_i$:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 3+(n-1)(1) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3+(n-1)(1) & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3+(n-1)(1) & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ 3+(n-1)(1) & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3+(n-1)(1) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

نخرج من العمود الأول $[3+(n-1)]$ كعامل مشترك :

$$\Delta_n= [3+(n-1)] \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

نجري التحويل التالي $R_i \to R_i - R_1$ فنحصل على محدد مثلثي علوي:

$$\Delta_n= [3+(n-1)] \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix} = [3+(n-1)](2)^{n-1}$$

و بالتالي فإن قيمة المحدد Δ هي : $\boxed{\Delta_n= [3+(n-1)](2)^{n-1}}$

❽ اثبت أن $\Delta=\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (a+b+2x)(a+b-2x)(b-a)^2$

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}}_{C_1 \to C_1+C_2+C_3+C_4} = \begin{vmatrix} a+b+2x & a & b & x \\ a+b+2x & x & x & b \\ a+b+2x & x & x & a \\ a+b+2x & b & a & x \end{vmatrix}$$

$$\Delta= (a+b+2x)\begin{vmatrix} 1 & a & b & x \\ 1 & x & x & b \\ 1 & x & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \end{matrix}$$

$$\Delta= (a+b+2x)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & b & x \\ 0 & x-a & x-b & b-x \\ 0 & x-a & x-b & a-x \\ 0 & b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}}_{C_1 \text{ وفق}}$$

$$\Delta = (a+b+2x)(1)\underbrace{\begin{vmatrix} x-a & x-b & b-x \\ x-a & x-b & a-x \\ b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}}_{R_2\to R_2-R_1}$$

$$\Delta = (a+b+2x)\underbrace{\begin{vmatrix} x-a & x-b & b-x \\ 0 & 0 & a-b \\ b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}}_{R_2\,\text{وفق}}$$

$$\Delta = (a+b+2x)[-(a-b)]\underbrace{\begin{vmatrix} x-a & x-b \\ b-a & a-b \end{vmatrix}}_{\text{إخراج}(b-a)}$$

$$\Delta = (a+b+2x)(b-a)(b-a)\begin{vmatrix} x-a & x-b \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a+b+2x)(b-a)^2[-x+a-x+b] \to \boxed{\Delta = (a+b+2x)(a+b-2x)(b-a)^2}$$

❾ اثبت أن $\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & x & z^2 \end{vmatrix}}_{L2} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}}_{L1}$

$$L1 = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}}_{\substack{R_1\to xR_1 \\ R_2\to yR_2 \\ R_3\to zR_3}} = \frac{1}{xyz}\underbrace{\begin{vmatrix} x & x^2 & xyz \\ y & y^2 & xyz \\ z & z^2 & xyz \end{vmatrix}}_{C_3\to\frac{C_3}{xyz}}$$

$$L1 = \underbrace{\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}}_{C_1\leftrightarrow C_3} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}}_{C_2\leftrightarrow C_3} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & x & z^2 \end{vmatrix} = L2$$

❿ احسب قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} e^{x-y} & 1 & e^{z-y} \\ e^{x-z} & e^{y-z} & 1 \\ 1 & e^{y-x} & e^{z-x} \end{vmatrix}$

الحل : نكتب المحدد Δ بالشكل التالي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^xe^{-y} & e^ye^{-y} & e^ze^{-y} \\ e^xe^{-z} & e^ye^{-z} & e^ze^{-z} \\ e^xe^{-x} & e^ye^{-x} & e^ze^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x}e^{-y}e^{-z}\begin{vmatrix} e^x & e^y & e^z \\ e^x & e^y & e^z \\ e^x & e^y & e^z \end{vmatrix} = 0 = L2$$

الحل : نخرج من العمود الأول العامل المشترك (e^{-y}) و من السطر الثاني العامل المشترك (e^{-z}) و من السطر الثالث العامل المشترك (e^{-x}) فنجد :

$$\Delta = e^{-x}e^{-y}e^{-z}\underbrace{\begin{vmatrix} e^x & e^y & e^z \\ e^x & e^y & e^z \\ e^x & e^y & e^z \end{vmatrix}}_{\text{تطابق}} = 0$$